Nicht für den Austausch

Physik

Elastische Eigenschwingungen von Kristallen bei gemischten Randbedingungen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades bei der

Naturwissenschaftlichen Fakultät der

Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu Breslau

vorgelegt von

Hugo Wierzejewski

aus Glogau

Breslau 1939

Druck der August Pries GmbH. in Leipzig

Meinen lieben Eltern!

Referent: Professor Dr. Fues

Korreferent: Professor Dr. Schaefer

Examen rigorosum: 15./16. Dezember 1937

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Diese Arbeit erschien gleichzeitig in Z. Kristallogr. (A), Bd. 101, Heft 1/2, 1939

Printed in Germany

Elastische Eigenschwingungen von Kristallen bei gemischten Randbedingungen

Von

H. Wierzejewski

Mit 6 Textfiguren

Elastische Eigenschwingungen von Kristallen bei gemischten Randbedingungen[1]).

Von H. Wierzejewski, Breslau.

Einleitung.

Die Eigenschwingungen elastischer fester Körper haben in neuerer Zeit — insbesondere durch die schnelle Entwicklung der Ultraschallforschung — große praktische Bedeutung erlangt[2]). Trotzdem ist es bisher erst in einzelnen Fällen gelungen, vollständige Eigenschwingungssysteme aufzustellen. Für Kristalle sogar nur in einem einzigen Falle, nämlich dem des Würfels bei gemischten Randbedingungen[3]).

Nachdem Sommerfeld in einer Vorlesung 1912/13 diese Aufgabe für den isotropen Würfel gelöst hatte, zeigte Ortvay, daß man auch für Kristalle gewisser Kristallsysteme in gleicher Weise das vollständige System der Eigenschwingungen erhält, wenn die Berandung der elastischen Symmetrie des Kristalls entsprechend orientiert ist.

Die Sommerfeld-Ortvayschen Lösungen sind von besonderer Einfachheit. Dies wird am deutlichsten, wenn man sie auflöst in Überlagerungen laufender elastischer ebener Wellen[4]). Dann zeigt sich:

1. Die Ausbreitungsvektoren, also Ausbreitungsrichtungen und Wellenlängen der beteiligten elastischen ebenen Wellen sind unabhängig von den Elastizitätskonstanten. (Diese gehen nur in ihre Beziehung zu Schwingungspolarisation und Schwingungsfrequenz ein[5]).) (A)
2. Die einzelne Eigenschwingung ist aus endlich vielen ebenen Wellen aufgebaut.

Physikalisch bedeutet (A), daß die ebenen Wellen an den Berandungsebenen reine reguläre Reflexionen ihrer Ausbreitungsrichtungen erfahren,

---

1) D_2.

2) Von den zahlreichen hierher gehörigen Arbeiten seien besonders die Experimente von Schaefer-Bergmann erwähnt, deren Theorie von Fues-Ludloff und von H. Mueller gegeben wurde, weil dieselben den Anlaß zur Anfertigung der vorliegenden Dissertation bildeten (s. Literaturverzeichnis).

3) Über die verschiedenen Arten von Randbedingungen vergleiche man Abschnitt 2.

4) Ortvay schreibt die Lösungen als Produkte von trigonometrischen Funktionen.

5) Weil jede einzelne ebene Welle den Bewegungsgleichungen genügen muß.

ohne daß dabei auch »gebrochen reflektierte« Wellen auftreten[1]). Dies ist nur möglich (Abschnitt 2) bei gemischten Randbedingungen. Es liegt daher nahe, die bei diesen vorhandenen Möglichkeiten einmal vollständig zu untersuchen. Dabei läßt sich die von Ortvay behandelte Aufgabe nach zwei Richtungen erweitern: Erstens wird man nach allen Berandungsformen fragen, für die es Eigenschwingungen vom Typus (A) gibt (und dabei auch »offene« Berandungen, z. B. die unendliche Platte, berücksichtigen); zweitens wird man nicht nur für die ganze Berandung gemischte Randbedingungen I. oder II. Art vorgeben, sondern auch, falls es möglich ist, für einen Teil der Berandung gemischte Randbedingungen I. und für den übrigen Teil II. Art. Wir setzen uns daher zum Ziel der Arbeit, für alle möglichen offenen und geschlossenen Berandungsformen bei allen möglichen Kombinationen gemischter Randbedingungen I. und II. Art die zugehörigen, vollständigen Eigenschwingungssysteme vom Typus (A) (als die einfachst möglichen) aufzustellen.

Durch (A) ist schon angedeutet die zur Behandlung der Aufgabe zu verwendende Methode: Aufbau der Eigenschwingungen aus laufenden elastischen ebenen Wellen.

Da es sich hierbei nur um Summen von ebenen Wellen handelt, gehen wir aus von folgender Definition: Eigenschwingung heißt eine Summe von laufenden ebenen Wellen einer Frequenz, wenn sie den Bewegungsgleichungen und den Randbedingungen genügt und sich nicht mehr in einfachere Summen mit ebendenselben Eigenschaften zerlegen läßt.

Bemerkung: Diese Definition entspricht der Auffassung, daß die laufende ebene Welle den »einfachsten« Schwingungsvorgang darstellt. Man könnte ebensogut auch die stehenden ebenen Wellen als »einfachste« Aufbauelemente ansehen[2]) und dementsprechend die kleinsten Summen stehender Wellen als Eigenschwingungen definieren. Für gewisse Berandungsformen sind, wie sich später zeigen wird[3]), die Eigenschwingungssysteme, die aus den beiden Definitionen folgen, identisch. Auch bei Benutzung laufender Wellen bekommt man dann nämlich Eigenschwingungen, die sich aus stehenden Wellen zusammensetzen, weil in ihnen mit jeder laufenden Welle zugleich die gegenlaufende enthalten ist. (»Stehende« Eigenschwingungen.)

Für andere Berandungsformen aber sind die beiden Definitionen nicht mehr äquivalent. Bei Benutzung stehender Wellen bekommt man »stehende« Eigenschwingungen. Bei Benutzung laufender Wellen dagegen bekommt man jetzt Eigenschwingungen, in denen zu jeder laufenden Welle die gegenlaufende nicht vorhanden ist, und die ich daher als »laufende« Eigenschwingungen bezeichne. Die

1) Jede gebrochene Reflexion würde nämlich die Elastizitätskonstanten in die Reflexionsrichtung hineinbringen.

2) Eine laufende Welle läßt sich immer zerlegen in 2 stehende und umgekehrt.

3) Abschnitt 4.

Gegenwellen für sich bilden dann ebenfalls eine Eigenschwingung. Da sich aus laufender und gegenlaufender Eigenschwingung durch Bildung von Summe und Differenz stets stehende Eigenschwingungen bestimmen lassen und umgekehrt, sind die beiden Systeme der laufenden und der stehenden Eigenschwingungen einander mathematisch völlig gleichwertig.

1. Elastische Wellen im unendlichen Kristall.

Mit den Bezeichnungen: Ortsvektor $\mathfrak{r} = (x_1, x_2, x_3)$, Verschiebungsvektor $\mathfrak{s} = (s_1, s_2, s_3)$, Deformationstensor $\sigma = [\![\nabla \mathfrak{s}]\!]_{\text{sym}}$, Spannungstensor $\Pi = \Pi_{\text{sym}}$[1]) ergibt sich der Spannungsvektor $\mathfrak{T}$, d. h. die Kraft, die auf die Oberflächeneinheit mit äußerer Normale $\mathfrak{n}$ von außen her ausgeübt wird, zu

$$\mathfrak{T} = [\mathfrak{n}, \Pi] = [\Pi, \mathfrak{n}], \tag{1}$$

und die elastische Ausschwingung $\mathfrak{s}$ gehorcht der Bewegungsgleichung

$$\varrho \ddot{\mathfrak{s}} = [\nabla, \Pi] \quad (\varrho = \text{Dichte}). \tag{2}$$

Führt man vorübergehend das elastische Potential ein:

$$\varphi = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k,m,n} \Gamma_{ikmn}\, \sigma_{ik}\, \sigma_{mn}, \tag{3}$$

in welchem (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) dem Tensor vierter Stufe Γ der Elastizitätskonstanten die Symmetriebedingungen $\Gamma_{ikmn} = \Gamma_{kimn} = \Gamma_{iknm} = \Gamma_{mnik}$ zugeschrieben werden sollen, so folgt als Ausdruck des Hookeschen Gesetzes:

$$\Pi_{ik} = \sum_{m,n} \Gamma_{ikmn}\, \sigma_{mn} = \sum_{m,n} \Gamma_{ikmn} \frac{\partial s_n}{\partial x_m} \tag{4}$$

und daher aus (2) die Bewegungsgleichungen:

$$\varrho\, \ddot{s}_k = \sum_{i,m,n} \Gamma_{ikmn} \frac{\partial^2 s_n}{\partial x_i \partial x_m} \tag{5}$$

In diesen Gleichungen sind die Materialkonstanten Γ_{ikmn} enthalten!

Setzt man ebene Wellen an:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{A} \cos(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t - \varphi), \tag{6}$$

wobei

$$\mathfrak{k} = k\,\mathfrak{n} = \omega/v\,\mathfrak{n} = 2\pi/\lambda\,\mathfrak{n} = \text{Ausbreitungsvektor};\ \mathfrak{A} = A\,\mathfrak{a} = \text{Amplitude};$$
$$\mathfrak{a} = \text{Polarisationsvektor}\ (|\,\mathfrak{a}\,| = 1) \tag{7}$$

---

1) Es ist $\alpha_{\text{sym}} = \frac{1}{2}(\alpha + \tilde{\alpha})$, wobei $\tilde{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki}$; weiterhin werden durch einfache (doppelte) eckige Klammern Vektoren (Tensoren 2. Stufe) angedeutet, z. B.

$$[\alpha, \mathfrak{a}]_i = \sum_k \alpha_{ik} a_k;\ [\mathfrak{a}, \alpha]_i = \sum_k a_k\, \alpha_{ki} = \sum_k \tilde{\alpha}_{ik}\, a_k = [\tilde{\alpha}, \mathfrak{a}]_i$$

$$[\![\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]\!]_{ik} = a_i b_k;\ [\![\nabla, \mathfrak{b}]\!]_{ik} = \frac{\partial b_k}{\partial x_i}.$$

so folgen die Amplitudengleichungen

$$\sum_{i,m,n} \Gamma_{ikmn}\, k_i k_m a_n - \varrho\omega^2 a_k = 0. \tag{8}$$

Aus ihnen bestimmen sich nur dann die Verhältnisse dreier Amplitudenkomponenten $a_1 : a_2 : a_3$, wenn die Determinante verschwindet. Führt man einen Tensor β ein durch:

$$\beta_{kn} = \sum_{i,m} \Gamma_{ikmn}\, n_i\, n_m = \beta_{nk}, \tag{9}$$

so kann (8) geschrieben werden:

$$[k^2\beta,\, \mathfrak{a}] - \varrho\,\omega^2\,\mathfrak{a} = 0, \tag{10}$$

und die zugehörige Determinantenbedingung wird:

$$|\, k^2\beta - \varrho\,\omega^2\,1\,| = 0 \tag{10'}$$

Als Gleichung für k bei variablem $\mathfrak{n}$, bzw. β aufgefaßt, bedeutet dies die Gleichung der Ausbreitungsfläche (für $\omega = 1$ Indexfläche).

Durch Division mit k^2 entsteht aus (10):

$$[\beta, \mathfrak{a}] - \varrho v^2 \mathfrak{a} = 0 \tag{11}$$

und aus (10') die Bedingung für v zu gegebenem $\mathfrak{n}$:

$$|\, \beta - \varrho v^2 1\,| = 0, \tag{11'}$$

d. h. die Gleichung der Normalenfläche.

Als Lösungen von (10'), (11') gibt es 3 verschiedene k^2, v^2 und zu jedem $k^{(j)^2}$, $v^{(j)^2}$ passend eine Amplitudenhauptrichtung $a_1^{(j)} : a_2^{(j)} : a_3^{(j)}$ aus (11).

Der symmetrische Tensor β bildet nach (11) jede der möglichen Amplitudenhauptrichtungen $\mathfrak{a}^{(j)}$ in ihre eigene Richtung ab und vergrößert dabei den Betrag auf das $\varrho v^{(j)2}$-fache. Daraus folgt, daß die $\mathfrak{a}^{(j)}$-Richtungen in die Hauptachsen des β-Ellipsoids[1])

$$(\beta\, [\![\mathfrak{r}\mathfrak{r}]\!]) \equiv \sum_{ik} \beta_{ik}\, x_i\, x_k = 1 \tag{12}$$

fallen, und daß die Normalengeschwindigkeiten $v^{(j)}$ aus den Hauptachsenlängen $|\, \mathfrak{r}^{(j)}\,|$ gefunden werden können:

$$\varrho\, v^{(j)^2} = \frac{1}{\mathfrak{r}^{(j)^2}}. \tag{12'}$$

Die beiden Beziehungen (12) (12') können dazu dienen, um zu jeder Normalenrichtung $\mathfrak{n}$ die zugehörigen Polarisationen $\mathfrak{a}$ und Schallgeschwindigkeiten v zu bestimmen[2]), wobei der Tensor β selbst aus (9)

1) Es heißt daher auch Polarisationsellipsoid. Man erhält es direkt aus dem doppelten elastischen Potential 2φ, wenn man dort $\partial s_k/\partial x_i$ ersetzt durch $n_i x_k$. Da φ nur positive Werte annimmt, ist die Fläche (12) immer ein Ellipsoid.

2) C. Runge, »Numerische Berechnung der Hauptachsen einer Fläche 2. Ordnung«, Z. S. Math. Phys. **52** (1905) 103.

berechnet werden muß. Als Hauptachsenrichtungen eines Ellipsoids stehen die die drei $\mathfrak{a}^{(j)}$ senkrecht aufeinander. Auch im Falle einer mehrfachen Wurzel der Gleichung (11'), wenn (12) ein Rotationsellipsoid oder eine Kugel ist, können und werden wir die 3 Richtungen $\mathfrak{a}^{(j)}$ als senkrecht aufeinander annehmen.

2. Randbedingungen und Eigenschwingungen von Halbraum und Platte.

Die gebräuchlichen Randbedingungen.

Man verwendet für gewöhnlich viererlei Randbedingungen. Allen ist gemeinsam, daß keine Energieübertragung durch die Oberfläche hindurch stattfindet.

1. $\mathfrak{s} = 0$ — fester Rand,
2. $\mathfrak{s}_n (= \mathfrak{s}_z) = 0$; $\mathfrak{T}_t = [\mathfrak{n}, \Pi]_t (= [\mathfrak{z}, \Pi]_{x,y}) = 0$
3. $\mathfrak{s}_t (= \mathfrak{s}_{x,y}) = 0$; $\mathfrak{T}_n = [\mathfrak{n}, \Pi]_n (= [\mathfrak{z}, \Pi]_z) = 0$ } »gemischte« Randbedingungen $\frac{\text{I.}}{\text{II.}}$ Art,
4. $[\mathfrak{n}, \Pi] = 0$ $(\Pi_{zi} = 0)$ — kräftefreier Rand,

Die Eigenschwingungen des Halbraumes ($z < 0$). (Zugleich Beweis, daß im allgemeinen nur bei gemischten Randbedingungen I oder II reine, nicht gebrochene Reflexion stattfindet.)

Geht man aus von einer beliebigen auf die Randfläche einfallenden ebenen Welle:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{A} \cos (\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t - \varphi) \tag{1}$$

und nimmt zu derselben, um die Randbedingungen befriedigen zu können, weitere von der Randfläche ausgehende ebene Wellen hinzu, d. h. macht man den Ansatz:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{A} \cos (\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t - \varphi) + \Sigma \mathfrak{A}^{(\nu)} \cos (\mathfrak{k}^{(\nu)} \mathfrak{r} - \omega^{(\nu)} t - \varphi^{(\nu)}), \tag{2}$$

so folgt in bekannter Weise aus allen angegebenen Randbedingungen, daß die Wellen (2) in Frequenz und Tangentialkomponente des Ausbreitungsvektors übereinstimmen müssen:

$$\left.\begin{aligned} \omega = \omega' = \omega'' = \cdots \\ \mathfrak{k}_t = \mathfrak{k}'_t = \mathfrak{k}''_t = \cdots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Figur läßt erkennen,

1. daß außer der einfallenden Welle noch 3 reflektierte Wellen anzusetzen sind, und daß hierzu noch 2 »gebrochene« Wellen hinzuzunehmen sind, (für den Ansatz (2) also im ganzen 6 ebene Wellen zur Verfügung stehen) falls man — wie wir es später tun werden — verlangt, daß die »Rand«bedingungen statt auf einer Grenzfläche Kristall-Vakuum auf

einer im Innern des (unendlichen) Kristalls gelegenen Ebene erfüllt sind,

2. daß die Ausbreitungsvektoren der reflektierten und gebrochenen Wellen von der Gestalt der Ausbreitungsfläche und daher in komplizierter Weise von den Elastizitätskonstanten abhängen,

3. daß im allgemeinen nur, wenn die Randebene E Symmetrieebene ist, sich zum Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}$ der einfallenden Welle ein (aber auch nur ein) weiterer Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}'$ unabhängig von den Elastizitätskonstanten bestimmen läßt, nämlich durch Spiegelung (oder »reguläre« Reflexion im Gegensatz zur »gebrochenen« Reflexion).

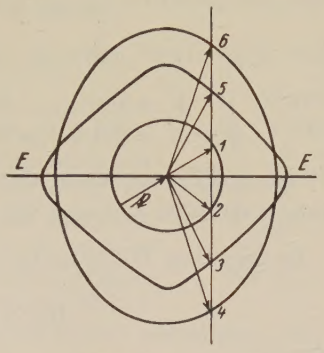

Fig. 1. E Randebene Kristall-Vakuum oder gedachte Ebene im unendlichen Kristall.
$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1$ »einfallende« Welle.
$\mathfrak{k}_2$ »regulär reflektierte« Welle.
$\mathfrak{k}_3$, $\mathfrak{k}_4$ »gebrochen reflektierte« Wellen.
$\mathfrak{k}_5$, $\mathfrak{k}_6$ »gebrochene Wellen«.

Wegen 3. kann es daher Eigenschwingungssysteme vom Typus (A) nur für Berandungen aus elastischen Symmetrieebenen geben[1]).

Demgemäß sei die Begrenzungsebene $z = 0$ des Halbraumes elastische Symmetrieebene, d. h. es sei

$$\Gamma_{ikmn} = 0, \tag{4}$$

wenn einer oder drei Indizes gleich z sind.

Ferner enthalte der Ansatz (2) außer der einfallenden Welle $\mathfrak{w}$ wegen (A) nur noch die »regulär« reflektierte Welle $\mathfrak{w}'$[2]), also:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{A} \cos(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t - \varphi) + \mathfrak{A}' \cos(\mathfrak{k}'\mathfrak{r} - \omega t - \varphi'), \tag{5}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{k}' = \hat{\mathfrak{k}} \text{ (bedeutet »}\mathfrak{k}\text{ gespiegelt«). Aus Symmetriegründen ist dann auch}^3) \\ &\mathfrak{a}' = \hat{\mathfrak{a}}\ (\mathfrak{A}' = A'\hat{\mathfrak{a}}). \text{ Dagegen sind Amplitudenbetrag } A' \text{ und Phasenkonstante } \varphi' \text{ noch frei.} \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

1) Für andere Randebenen E kann es nur bei ganz spezieller Wahl von $\mathfrak{k}$ einzelne Eigenschwingungen vom Typus (A) geben, z. B. für $\mathfrak{k} \perp E$.

2) Der Ausdruck »reguläre Reflexion« bezieht sich nur auf die Ausbreitungsvektoren und nicht auf das durch die ebene Welle gebildete Verschiebungsfeld.

3) Die »ergänzte« Ausbreitungsfläche, in der zu jedem $\mathfrak{k}$ die zugehörige Richtung $\mathfrak{a}$ eingetragen ist, muß ja auch die elastische Symmetrie des Kristalls aufweisen.

Bei Zerlegung: $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_t + \mathfrak{r}_n$; $\hat{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k}_t - \mathfrak{k}_n$ wird innerhalb $z = 0$ ($\mathfrak{r}_n = 0$!):

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{A} \cos(\mathfrak{k}_t \mathfrak{x}_t - \omega t - \varphi) + \mathfrak{A}' \cos(\mathfrak{k}_t \mathfrak{x}_t - \omega t - \varphi'). \tag{6}$$

Jede Randbedingung $s_j = 0$ verlangt somit:

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{A} \cos\varphi + \mathfrak{A}' \cos\varphi']_j &= 0 \\ [\mathfrak{A} \sin\varphi + \mathfrak{A}' \sin\varphi']_j &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

daher $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi'$ oder $\varphi - \varphi' \equiv 0 \bmod \pi$, also

entweder $\varphi - \varphi' = 2h\pi$ und $[\mathfrak{A} + \mathfrak{A}']_j = 0$ (8)
oder $\varphi - \varphi' = (2h+1)\pi$ und $[\mathfrak{A} - \mathfrak{A}']_j = 0$ $(h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (8′)

[(8′) ist überflüssig, denn daraus folgt s_j wie aus (8), weil ein Phasensprung π dasselbe bedeutet wie eine Vorzeichenänderung der Amplitude.]

In derselben Weise findet man: Jede Randbedingung

$$\Pi_{ik} = \Sigma \Gamma_{ikmn} \frac{\partial s_n}{\partial x_m} = 0$$

verlangt:

$$\varphi - \varphi' = 2h\pi \text{ und } \Sigma \Gamma_{ikmn} [\![\mathfrak{k} \mathfrak{A} + \hat{\mathfrak{k}} \mathfrak{A}']\!]_{mn} = 0 \tag{9}$$

(oder ein (8′) entsprechendes Gleichungspaar, das wieder überflüssig ist) wegen (8), (9) und $\hat{\mathfrak{k}} = (k_x, k_y, -k_z)$, $\mathfrak{A}' = A'(a_x, a_y, -a_z)$ erfordern daher die Randbedingungen 2 [$s_z = 0$, $\Pi_{zj} = 0$, $j = x, y$]:

$$\left.\begin{aligned} (A - A')\, a_z &= 0; \quad \varphi - \varphi' = 0 \\ (A - A')\, [\Gamma_{zjyz}(k_y a_z + k_z a_y) + \Gamma_{zjzx}(k_z a_x + k_x a_z)] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und die Randbedingungen 3 [$s_j = 0$, $j = x, y$; $\Pi_{zz} = 0$]:

$$\left.\begin{aligned} (A + A')\, a_j &= 0; \quad \varphi - \varphi' = 0 \\ (A + A')\, [\Gamma_{zzxx} k_x a_x + \Gamma_{zzyy} k_y a_y + \Gamma_{zzzz} k_z a_z + \Gamma_{zzxy}(k_x a_y + k_y a_x)] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Aus $\begin{matrix}(10)\\(11)\end{matrix}$ folgt: $A' = A, \quad \varphi' = \varphi$ (12)
$A' = -A, \quad \varphi' = \varphi$ (13)

und daher

$$\mathfrak{w}' = \pm \hat{\mathfrak{A}} \cos(\hat{\mathfrak{k}} \mathfrak{r} - \omega t - \varphi).$$

Geometrisch gesehen, bedeutet dies, daß durch den Ansatz (5) die Randbedingungen 2 bzw. 3 dann und nur dann erfüllt werden, wenn das Vektorfeld $\mathfrak{w}'(\mathfrak{r})$ (also nicht nur $\mathfrak{k}'$ und a', sondern die ebene Welle $\mathfrak{w}'$ als Ganzes) aus $\mathfrak{w}(\mathfrak{r})$ hervorgeht durch Spiegelung bzw. Umkehrspiegelung (d. h. Spiegelung von $-\mathfrak{w}(\mathfrak{r})$) an der Berandungsebene oder — was dasselbe besagt —: wenn das Vektorfeld $\mathfrak{s} = \mathfrak{w} + \mathfrak{w}'$ symmetrisch bzw. antisymmetrisch zur Randebene ist[1]).

1) Dabei ist $\mathfrak{s}$ als Schwingung eines unendlichen Kristalls vorzustellen, bei

Man erkennt ferner aus (10) (11), daß sich die Randbedingungen 1 und 4 mit »regulärer« Reflexion, d. h. mit Ansatz (5) überhaupt nicht erfüllen lassen[1]). Sie verlangen stets auch gebrochene Reflexion.

Aus dieser koordinatenfreien Formulierung der Ergebnisse (12) bzw. (13) geht hervor, daß auch die Eigenschwingungen des von einer beliebig gelegenen elastischen Symmetriebene berandeten Halbraumes $(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) \leqq d$ bei Randbedingungen 2 oder 3 geschrieben werden können[2]):

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{A} \cos(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t - \varphi) + \hat{\mathfrak{A}} \cos(\hat{\mathfrak{k}}\mathfrak{r} - \omega t - \varphi'). \tag{14}$$

Damit die zweite Welle in (14) die aus der ersten durch Spiegelung bzw. Umkehrspiegelung an der Ebene $(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) = d$ hervorgegangene ist, muß aber noch die Phasendifferenz $\varphi - \varphi'$ passend gewählt werden. Den Wert $\varphi - \varphi' = 0$ in (12) (13) erhielten wir nur, weil dort die Spiegelebene durch den Nullpunkt ging. — Soll die ebene Welle $\mathfrak{w} = \mathfrak{A} \cos(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t - \varphi)$ einer einfachen Spiegelung an E_d unterworfen werden, so heißt das: der Vektor des Feldes $\mathfrak{w}$, der sich im Spiegelpunkt $2d\mathfrak{n} + \hat{\mathfrak{r}}$ des Punktes $\mathfrak{r}$ befindet, ist zu spiegeln und dann im Punkt $\mathfrak{r}$ anzubringen, also

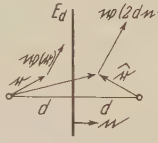

Fig. 2.

$$\mathfrak{w}' = \hat{\mathfrak{A}} \cos[\mathfrak{k}(2d\mathfrak{n} + \hat{\mathfrak{r}}) - \omega t - \varphi] = \hat{\mathfrak{A}} \cos[\hat{\mathfrak{k}}\mathfrak{r} - \omega t - (\varphi - \mathfrak{k}\mathfrak{n}2d)].$$

Bei Umkehrspiegelung ist noch ein Phasensprung π hinzuzufügen. (14) stellt also nur dann eine Eigenschwingung dar, wenn

$$\varphi - \varphi' = (\mathfrak{n}\mathfrak{k})2d + 2h\pi \qquad \text{für Randbedingungen 2} \tag{15}$$

und

$$\varphi - \varphi' = (\mathfrak{n}\mathfrak{k})2d + (2h+1)\pi \quad \text{« « 3.} \tag{16}$$

Zusammenfassung:

Eigenschwingungssysteme vom Typus (A) kann es nur bei elastischen Symmetrieebenen als Berandungsebenen und regulärer Reflexion der Ausbreitungsvektoren und daher nicht bei Randbedingungen 1 und 4, sondern nur bei 2 und 3, d. h. bei gemischten Randbedingungen geben.
Die Randbed. 2 bewirken einfache Spiegelung } der geg. d. Berandung
« « 3 « Umkehrspiegelung } anlaufenden Wellen.
« « 1 und 4 dagegen bewirken stets auch das Auftreten gebrochen reflektierter Wellen. (B)

---

der in der Ebene $z = 0$ »Rand«bedingungen erfüllt sind. — Ein Vektorfeld heißt symmetrisch (antisymmetrisch) zu einer Ebene, wenn es durch Ausführung einer Spiegelung (Umkehrspiegelung) mit sich selbst zur Deckung kommt. — Ich bezeichne im folgenden Spiegelebenen mit E^s, Umkehrspiegelebenen mit E^u.

1) Abgesehen von einzelnen Ausnahmen bei ganz spezieller Wahl von $\mathfrak{k}$ (vgl. Anm. 1, S. 99).

2) Auch bei Randbedingungen 3 schreibe ich jetzt $+ \hat{\mathfrak{A}}$, weil ja die Vorzeichenänderung der Amplitude als Phasensprung π in die Phasenkonstante φ' aufgenommen werden kann.

Die Eigenschwingungen der unendlichen Platte zwischen $(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) = d_1$ und $(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) = d_2$.

Die Eigenschwingungen der Platte sind notwendigerweise zugleich Eigenschwingungen der Halbräume, die von den einzelnen Plattenebenen begrenzt werden und haben infolgedessen die Gestalt (14). Es sind aber jetzt nicht mehr beliebige Ausbreitungsvektoren zugelassen, sondern nur mehr solche, deren Normalkomponenten $(\mathfrak{n}\mathfrak{k}) = k_n$ bestimmten aus (15) und (16) folgenden Bedingungen genügen.

Sollen auf beiden Begrenzungsebenen der Platte dieselben Randbedingungen erfüllt sein, so muß gelten:

$$2k_n (d_2 - d_1) = 2h\pi. \tag{17}$$

Sollen dagegen auf der einen Ebene die Randbedingungen 2, auf der anderen 3 erfüllt sein, so muß gelten:

$$2k_n(d_2 - d_1) = (2h + 1)\pi. \tag{18}$$

Führt man ein: $\lambda_n = 2\pi/k_n$, so bedeutet

(17): (18): $2D = 2(d_2 - d_1) = \begin{matrix}\text{gerades}\\ \text{ungerades}\end{matrix}$ Vielfaches von $\lambda_n/2$. Die Endpunkte der »zulässigen« Ausbreitungsvektoren bilden eine Ebenenschar im $\mathfrak{k}$-Raum:

$$(\mathfrak{n}\mathfrak{k}) = 2h \,.\, \pi/2D \tag{19}$$

bzw.

$$(\mathfrak{n}\mathfrak{k}) = (2h + 1)\,\pi/2D. \tag{20}$$

Bei den aus ebenen Wellen aufgebauten Eigenschwingungen der Platte von der Dicke D sind im Raum außerhalb auf allen Ebenen

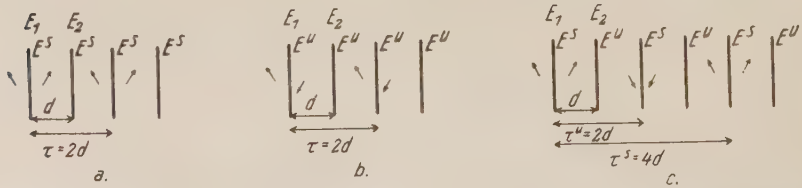

Fig. 3. Die eingezeichneten Abstände $\tau = 2d$ bzw. $= 4d$ bedeuten Translationen; vgl. hierzu Abschnitt 3.

im Abstand $h \cdot D$ auch wieder Randbedingungen 2 oder 3 erfüllt. Man kann sich diese Ebenen erzeugt denken durch Spiegelung der beiden Plattenebenen E_1 und E_2 und der dadurch erzeugten Ebenen aneinander. Auf allen »gleichwertigen« Ebenen der so entstandenen Parallelschar,

d. h. auf allen, die durch Spiegelung miteinander zur Deckung gebracht werden können, sind dieselben Randbedingungen erfüllt (weil das Verschiebungsfeld $\mathfrak{s}$ entweder zu allen symmetrisch oder zu allen antisymmetrisch ist).

Auch auf mehr als 2 Ebenen können deshalb (wenn sie in rationalem Abstandsverhältnis stehen) »Rand«bedingungen vorgeschrieben werden, verschiedene Randbedingungen jedoch nur auf zueinander ungleichwertigen Ebenen. (Vgl. Fig. 3.)

3. Eigenschwingungen bei Berandungen aus Ebenen verschiedener Normalenrichtung.

Die einer Berandung K zugeordnete Punktgruppe P, Raumgruppe R und deren Grundbereich K_0.

Die Aufsuchung aller möglichen Berandungsformen sowie der zugehörigen Eigenschwingungen ist wegen (B) nur noch eine geometrische Aufgabe. Bei der Lösung derselben werden einige allgemeine gruppentheoretische Zusammenhänge von Wichtigkeit werden. Diese sollen daher zuerst, gesondert von der Betrachtung der Eigenschwingungen, besprochen werden.

Gegeben sei eine »Berandung« K, bestehend aus Ebenen, die einen beliebigen (endlichen oder 1-, 2-, 3-dimensional unendlichen) Teil des Raumes abgrenzen. Wir nehmen an, diese Begrenzungsebenen seien füreinander Spiegelebenen. Dann geht aus ihnen durch gegenseitige Spiegelung eine unendliche Menge weiterer Spiegelebenen hervor. Ihre Gesamtheit bildet zusammen mit allen weiteren durch sie bedingten Symmetrieelementen (Drehungsachsen als Schnittlinien von Spiegelebenen usw.) das der Berandung K zugeordnete Raumsystem R von Symmetrieelementen. Ihm entspricht eine Raumgruppe von Symmetrieoperationen, die daher ebenfalls mit R bezeichnet sei.

Legt man zu jeder Ebene aus R eine parallele Ebene durch einen festen Punkt, so erhält man die zu R isomorphe Punktgruppe P. (Außer den Spiegelebenen enthält sie alle weiteren durch dieselben bedingten Symmetrieelemente, so daß jedem Punktsymmetrieelement aus R ein ebensolches in P entspricht.)

Uns interessieren im folgenden nur solche Berandungen K, bei denen die Ebenen von R nicht unendlich dicht liegen, sondern wo es Zellen K_0 von einer gewissen Mindestgröße gibt, durch deren Inneres keine Ebenen hindurchgehen. Deshalb müssen wir für R folgende 2 Eigenschaften voraussetzen:

α) 2 nicht parallele Ebenen müssen sich stets unter einem Winkel schneiden, der in rationalem Verhältnis zu 2π steht (weil anderenfalls aus den 2 Ebenen ein Büschel von unendlich vielen Ebenen durch ihre Schnittachse entstehen würde),

β) 3 parallele Ebenen müssen stets in rationalem Abstandsverhältnis stehen (weil anderenfalls aus ihnen eine Parallelschar hervorgehen würde, in der es keinen kleinsten Abstand gibt).

Durch die Ebenen eines solchen Raumsystems wird offenbar der ganze Raum lückenlos in lauter (direkt oder spiegelbildlich) kongruente kleinste Zellen K_0 eingeteilt (denn wenn 2 Sorten kleinster Zellen verschiedener Gestalt oder Größe K_1 und K_2 existierten, so müßten diese irgendwo mit Spiegelebenen aneinandergrenzen, was unmöglich ist, weil man sonst durch Spiegelung auch Ebenen durch ihr Inneres bekommen würde).

Man sieht leicht, daß man aus K_0 das ganze Raumsystem R zurückgewinnen kann, indem man K_0 an seinen Rändern spiegelt, die Spiegelbilder an ihren neuen Rändern usw. Die Berandung K besteht daher stets aus einer gewissen Gesamtheit von Zellen K_0.

Aus der Eigenschaft α von R geht hervor, daß die isomorphe Punktgruppe P nur endlich viele Ebenen enthalten kann. Wir haben also nur endliche Punktgruppen zu betrachten und zwar sind aus der Gesamtheit der endlichen Punktgruppen (nicht nur der kristallographischen![1])) diejenigen auszuwählen, die sich lediglich aus Spiegelungen erzeugen lassen. Dies sind:

C_v C_{nv} D_{nh} T_d O_h I_h mit im allgemeinen:

2 $2n$ $4n$ 24 48 120 gleichwertigen Punkten, deren Anzahl sich für spezielle Punktlagen jedoch erheblich reduzieren kann.

Jede der in P enthaltenen Symmetrieebenen kommt in R entweder einmal oder in unendlicher Wiederholung als Parallelschar vor. Dabei müssen notwendig in R:

a) 0 Parallelscharen vorkommen, wenn K_0 3-dimensional unendlich ausgedehnt,

b) 1 « « « K_0 2- « « «

c) 2 (oder mehr) Parallelscharen vorkommen (deren Normalenrichtungen alle in einer Ebene liegen), wenn K_0 1-dimensional unendlich ausgedehnt,

d) 3 (oder mehr) Parallelscharen vorkommen (wobei mindestens 3 Normalenrichtungen nicht in einer Ebene liegen), wenn K_0 allseitig endlich ist.

---

1) Bei C_{nv} und D_{nh} sind also für n alle positiven ganzen Zahlen zugelassen, und außerdem kommt die Ikosaedergruppe I_h hinzu. — In den Büchern über Kristallographie findet man die endlichen Punktgruppen meist nach Drehachsen geordnet. Bei Benutzung solcher Zusammenstellungen ist zu bedenken, daß zwar jede Schnittlinie von n Spiegelebenen n-zählige Drehungsachse, aber nicht jede Drehungsachse Schnittlinie von Spiegelebenen ist.

Bei a) gehen alle Ebenen von R durch einen Punkt, d. h. R reduziert sich auf P, bei b, c, d dagegen enthält R eine lineare, ebene, räumliche Gruppe Γ von Translationen, denn jede der in R vorhandenen Parallelscharen $(\mathfrak{n}_i \mathfrak{r}) = h_i d_i$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ bedingt ja z. B. das Vorhandensein der Translation $\mathfrak{a}_i = 2 d_i \mathfrak{n}_i$, die senkrecht zu den Scharebenen gerichtet und von der Länge $\tau_i = 2 d_i$ ist. — Andere als diese N-Translationen $\mathfrak{a}_i$ (und die daraus durch vektorielle Addition folgenden) sind in R nicht vorhanden, weil alle Symmetrieoperationen aus R allein durch die Spiegelungen erzeugt sind. Unter den $\mathfrak{a}_i$ befinden sich daher auch primitive Translationen der in R enthaltenen Translationengruppe, so daß sich das zugehörige Translationsgitter stets darstellen läßt durch: $\mathfrak{a} = \Sigma n_i \mathfrak{a}_i$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. Das von den primitiven Vektoren $\mathfrak{a}_i$ bestimmte »Grundgebiet der Periodizität« bezeichne ich mit G. Es ist G bei b) eine Strecke: $\mathfrak{a}_1$, bei c) ein Parallelogramm: $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ und bei d) ein Parallelepiped: $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$.

Es ist wichtig zu beachten, daß nicht alle Deckbewegungen des Raumsystems R Symmetrieoperationen aus R sind, sondern nur diejenigen, die auf Spiegelungen zurückführbar sind. Wenn z. B. R aus einer einzigen Parallelschar $(\mathfrak{n}\mathfrak{r}) = hd$ besteht, so sind die Verschiebungen $h\mathfrak{a} = 2hd\mathfrak{n}$ die einzigen zu R gehörenden Translationen, während $(h + \frac{1}{2})\mathfrak{a} = (2h + 1)d\mathfrak{n}$ oder irgendwelche Bewegungen $\mathfrak{a}' \perp \mathfrak{n}$ keine Translationen aus R sind. Z. B. sind bei einer Raumaufteilung R in lauter Würfel K_0 erst Verschiebungen in Kantenrichtung um das Doppelte der Kantenlänge von K_0 Deckbewegungen, die zu R gehören. Es gilt daher hier auch nicht $G = K_0$, sondern $G = 8 K_0$. Deshalb müssen durch das Innere von G — dies gilt allgemein — stets Ebenen aus R hindurchgehen. — Auch die Randebenen der Zelle G sind in vielen Fällen (z. B. beim Würfel) Ebenen aus R; aber nicht immer, weil sich G — wie wir auf S. 107 sehen werden — nicht immer durch Aneinanderlegen von Grundbereichen K_0 aufbauen läßt.

Die Gestalt der verschiedenen Grundbereiche K_0.

Um eine anschauliche Vorstellung von den für uns in Betracht kommenden Raumsystemen R und ihren Grundbereichen K_0 zu gewinnen, seien letztere hier kurz abgeleitet und in Vollständigkeit zusammengestellt. Bei der nachfolgenden Ableitung[1]) wird immer davon ausgegangen, daß definitionsgemäß durch das Innere von K_0 keine Spiegelebenen aus R gehen dürfen; daher können die Kantenwinkel von K_0 höchstens 90° betragen. (Denn durch Spiegelung der einen Schenkelebene eines stumpfen Kantenwinkels an der anderen erhält man notwendig auch eine Spiegelebene im Innern. Vgl. Figur 4).

Fig. 4.

1) Man könnte auch von den 230 kristallographischen Raumgruppen ausgehen. Aus diesen hätte man diejenigen R auszuwählen, die sich lediglich aus Spiegelungen herleiten lassen (auch mit Ausschluß der Gleitspiegelungen). Dabei wäre aber zu beachten, daß außerdem auch nichtkristallographische Raumgruppen zugelassen sind, z. B. solche, die nicht nur Parallelscharen, sondern auch einzelne Ebenen enthalten.

Aufzählung der möglichen Grundbereiche *Ko*.

a) R enthält **keine** Translationengruppe (also $R = P$).
K_o 3-dimensional unendlich ausgedehnt.
(K_o Halbraum, räumliche Kante oder Ecke).

R enthält:	R identisch mit:	K_o:
α) eine einzige Ebene E	C_s	Halbraum
β) alle E durch eine Achse	C_{nv}	körperliche Kante, Kantenwinkel π/n ($n = 2, 3, 4, 5, \cdots$)
γ) alle E durch einen Punkt	D_{nh}	rechtwinklig abgeschnittene »halbe Kante«
aber nicht durch eine Achse	T_d, O_h, I_h	im Mittelpunkt des regulären Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders von drei benachbarten Symmetrieebenen gebildete körperliche Ecke.

b) R enthält eine **lineare** Translationengruppe;
K_o 2-dimensional unendlich ausgedehnt.
(Platte, Halbplatte, Plattenecke)

R enthält:	R isomorph zu:	K_o:
α) Außer der Parallelschar S keine Symmetrieebenen	C_s	Platte zwischen zwei Nachbarebenen von S
β) außer S noch eine (dazu senkrechte) E	C_{2v}	„Halbplatte“
γ) außer S noch nE durch eine Achse senkrecht zu S	D_{nh} $n = 2, 3, 4, 5, \cdots$	„Plattenecke“ mit Eckenwinkel π/n

(Einzelne Ebenen schief zu S können wegen der $\perp S$ operierenden Translationengruppe nicht vorkommen; ebensowenig Ebenen $\perp S$, die nicht alle durch eine Achse gehen).

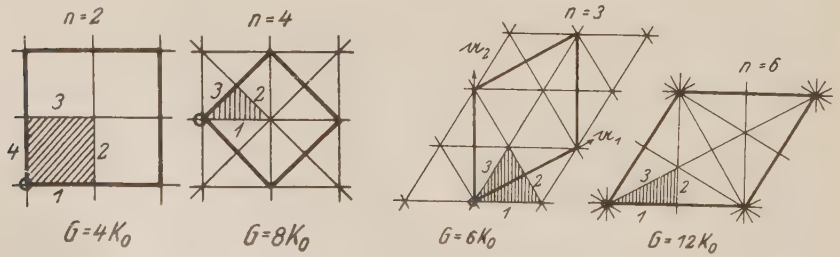

Fig. 5. (G ist stark umrahmt; K_o ist schraffiert).
Für $n = 2$ sind die Ebenen 1, 2, 3, 4 alle einander ungleichwertig.
Für $n = 3$ sind die Ebenen 1, 2, 3 alle einander gleichwertig.
Für $n = 4$ sind die Ebenen 1, 2, 3 alle einander ungleichwertig.
Für $n = 6$ sind die Ebenen 2, 3 gleichwertig und zu 1 ungleichwertig.

c) R enthält eine **ebene** Translationengruppe;
K_0 1-dimensional unendlich ausgedehnt.
(Prisma, Halbprisma)

Da stumpfe Kantenwinkel nicht vorkommen dürfen, so kann der Prismenquerschnitt nur in einem (spitz- oder rechtwinkligen) Dreieck oder höchstens in einem Rechteck bestehen.

R enthält:	R isomorph zu:	K_0:	Querschnitt von K_0 und G
α) nur n Parallelscharen S_i mit gemeinsamer Achse	C_{nv} $n = 2, 3, 4, 6$.	Prisma	(siehe Fig. 5)
β) außer den n S_i noch eine E senkrecht dazu	D_{nh} $n = 2, 3, 4, 6$.	Halbprisma	wie bei α

(Ebenen schief zu den Parallelscharen können wegen der Translationengruppe nicht vorkommen.)

d) R enthält eine **räumliche** Translationengruppe;
K_0 allseitig endlich ausgedehnt.
(Endliches Prisma, Pyramide, [Quader])

Aus dem gleichen Grund wie bei c) kann der Grundbereich K_0 nur aus einer Pyramide über einem (spitz- oder rechtwinkligen) Dreieck oder einem endlichen Prisma mit solchem Querschnitt oder einem allseitig rechtwinkligen Quader bestehen. — Wegen der räumlichen Translationengruppe enthält R keine Einzelebenen mehr, sondern nur noch Parallelscharen.[1])

R enthält:	R isomorph zu:	K_0:
α) n Parallelscharen S_i parallel einer gemeinsamen Achse und eine Parallelschar senkrecht zu allen S_i	D_{nh} $n = 2, 3, 4, 6$	endliche Prismen mit den unter c genannten Querschnitten. (Für $n = 3$ sind die Seitenflächen von G keine Ebenen aus R)
β) 6 bzw. 9 Parallelscharen S_i parallel zu den Ebenen der Punktgruppen T_d bzw. O_h	T_d, O_h	Die möglichen K_0 (einer für T_d, zwei für O_h) werden von Symmetrieebenen des Tetraeders bzw. Oktaeders berandet. (Vgl. die Figuren!)

(I_h scheidet wegen der Translationengruppe aus, die keine 5-zähligen Achsen enthalten kann.

1) Alle R sind daher »kristallographische« Raumsysteme.

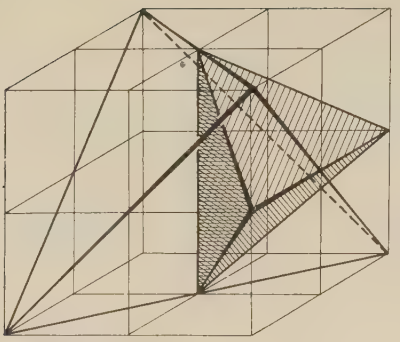

Fig. 6a. Grundbereich K_0 zu T_d. Symmetrieebenen des Tetraeders: (110), ($\bar{1}10$), (101), ($\bar{1}01$), (011), ($0\bar{1}1$). Grundbereich K_o wie gezeichnet (gebildet ohne stumpfe Kantenwinkel aus Symmetrieebenen des Tetraeders). Aus K_o entsteht durch Halbierung der Grundbereich $K_0^{(1)}$ zu O_h und durch nochmalige Halbierung $K_0^{(2)}$.

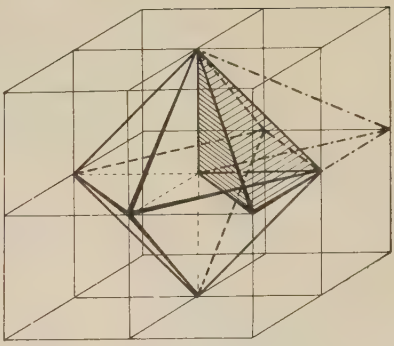

Fig. 6b. Grundbereiche $K_0^{(1)}$ und $K_0^{(2)}$ zu O_h. Symmetrieebenen des Oktaeders: 1.) Die des Tetraeders, 2.) die (zu diesen ungleichwertigen) Ebenen: (100), (010), (001). Grundbereiche $K_0^{(1)}$ und $K_0^{(2)}$ wie gezeichnet (gebildet ohne stumpfe Kantenwinkel aus Symmetrieebenen des Oktaeders, $K_0^{(2)}$ ist schraffiert). Aus $24\,K_0^{(1)} = 48\,K_0^{(2)}$, aber auch schon aus $6\,K_0^{(2)}$ lassen sich würfelförmige Berandungen aufbauen.

Das Raumsystem R.

Unsere bisherigen Betrachtungen müssen noch eine Erweiterung erfahren, weil wir es im folgenden nicht nur, wie in der Kristallographie, mit Symmetrieeigenschaften von Skalarfeldern (Punktanordnungen usw.) zu tun haben, sondern auch von Vektorfeldern (z. B. dem Verschiebungsfeld $\mathfrak{s}$).

Ein Vektorfeld kann nämlich außer reinen Spiegelebenen E^s auch Umkehrspiegelebenen E^u als Symmetrieelemente besitzen. Entsprechend kann ein beliebiges Symmetrieelement S aus R (z. B. Drehung, Translation) für ein Vektorfeld entweder den Charakter S^s oder S^u besitzen, d. h. »einfaches Symmetrieelement« oder »Antisymmetrieelement« sein (vgl. S. 100).

Denken wir uns daher jetzt die Ebenen E der Berandung K (oder K_o), aus der wir das Raumsystem R abgeleitet hatten, als Ebenen E^s bzw. E^u ausgezeichnet, so folgt daraus sofort für alle Ebenen aus R entweder der Charakter E^s oder E^u; besitzt nämlich eine bestimmte Ebene E den Charakter E^s (E^u), so folgt derselbe Charakter auch für alle zu E gleichwertigen Ebenen (d. h. für alle Ebenen, die aus E durch die Symmetrieoperationen von R erzeugt werden können). Die Gesamtheit der Ebenen

E^s und E^u (zusammen mit allen weiteren hierdurch bedingten Symmetrieelementen S^s und S^u) bildet das R zugeordnete Raumsystem R. Die es erzeugende, aus Ebenen E^s und E^u bestehende Berandung bezeichnen wir dementsprechend mit $\bar{K}$ (bzw. K_0).

$\bar{R}$ enthält — entsprechend Γ bei R — eine Translationengruppe Γ, in der aber im allgemeinen neben einfachen Translationen der Größe $\tau_i^s = 2d_i$ auch »Umkehr«translationen $\tau_k^u = 2d_k$ enthalten sind. (Vgl. Fig. 3.) Da aber 2 Umkehrtranslationen immer eine einfache Translation $\tau_k^s = 4d_k$ ergeben, enthält R in jedem Falle auch eine Gruppe Γ' nur von einfachen Translationen. Sie ist eine Untergruppe der zu R gehörenden Gruppe Γ (oder identisch mit Γ, wenn R nur Ebenen E^s enthält), weshalb die Grundzelle G' von Γ' — die ebenfalls von primitiven Translationen senkrecht zu gewissen Ebenenscharen zu bilden ist — im allgemeinen verschieden von der zu Γ gehörenden Grundzelle G ist und größeres Volumen als dieselbe besitzt.

Der Aufbau und die Symmetrieeigenschaften der Eigenschwingungen.

Hat man eine Berandung K aus elastischen Symmetrieebenen und auf derselben eine mögliche Verteilung der gemischten Randbedingungen I. und II. Art vorgegeben, so sind wegen (B) die Ebenen, auf denen die Randbedingungen I (II) gelten, einfache Spiegelebenen E^s (Umkehrspiegelebenen E^u) für die gegen sie anlaufenden ebenen Wellen (m. a. W.: durch Vorgabe der Randbedingungen geht K in ein K über).

Aus einer beliebigen in einer Eigenschwingung enthaltenen ebenen Welle $\mathfrak{w}$ kann man daher (gemäß unserer Definition der »Eigenschwingung«) die ganze Eigenschwingung aufbauen, indem man alle ebenen Wellen hinzunimmt, die sich aus $\mathfrak{w}$ durch Spiegelung an den Randebenen E^s und Umkehrspiegelung an den Randebenen E^u erzeugen lassen.

Die Überlagerung dieser Wellen stellt daher ein Vektorfeld dar, das (im unendlichen Kristall betrachtet) symmetrisch zu den Ebenen E^s und antisymmetrisch zu den Ebenen E^u von K ist und deshalb auch alle weiteren hierdurch bedingten Symmetrieeigenschaften besitzt, d. h. aber:

Jede Eigenschwingung von $\bar{K}$ besitzt (mindestens) die Symmetrie der $\bar{K}$ zugeordneten Raumgruppe R.

Die möglichen Berandungsformen und Kombinationen gemischter Randbedingungen.

Aus der »Aufbauvorschrift« ersieht man, daß die Ausbreitungsvektoren der ebenen Wellen einer Eigenschwingung einfach dadurch gewonnen werden können, daß man mit dem $\mathfrak{k}$ der Ausgangswelle $\mathfrak{w}$ alle Symmetrieoperationen der K zugeordneten Punktgruppe P ausführt.

Wegen Forderung (A) sollen hierbei nur endlich viele $\mathfrak{k}$ erzeugt werden. P muß also eine der früher besprochenen endlichen Punktgruppen sein. (Die Zahl ihrer gleichwertigen Punkte ist dann zugleich die Zahl der in der Eigenschwingung enthaltenen ebenen Wellen.) Außerdem dürfen auch — wie schon bei Aufsuchung der Eigenschwingungen der Platte (Abschnitt 2) bemerkt — aus K keine Parallelscharen von Ebenen mit beliebig kleinem Ebenenabstand hervorgehen. Es kommen also für uns nur solche Berandungen K in Betracht, bei denen das zugeordnete Raumsystem R den Bedingungen α und β von S. 104 genügt.

Diese »zulässigen« Berandungen K, für die allein es Eigenschwingungen vom Typus (A) gibt, sind dadurch charakterisiert, daß jedes K aus einer gewissen Gesamtheit von kleinsten Zellen K_0 aufgebaut ist.

Die bei Kristallen möglichen Berandungen K.

Da zum Aufbau der Berandung K nur elastische Symmetrieebenen verwendet werden dürfen [Forderung (B)], kann es elastische Eigenschwingungen vom Typus (A) nur dann geben, wenn die Symmetrie der K zugeordneten Punktgruppe $P \equiv P_{\text{Ber}}$ nicht größer ist als die Symmetrie P_{Kr} der elastischen Eigenschaften des Materials.

Bei isotropen Körpern ist jede Ebene elastische Symmetrieebene, und daher sind alle Grundbereiche K_0 und daraus aufgebauten K zulässig. Bei anisotropen Körpern (Kristallen) dagegen sind nur noch gewisse Ebenen elastische Symmetrieebenen. Dieselben können aus folgender Tabelle entnommen werden. (Vgl. Voigt, »Lehrbuch der Kristallphysik« 1910, S. 585 und S. 756.)

Kristallsystem	triklin	monoklin	rhombisch	trigonal
elastische Symmetrie	C_i	C_{2h}	L_{2h}	L_{3d}

Kristallsystem	tetragonal	hexagonal	regulär
elastische Symmetrie	D_{4h}	$D_{\infty h}$	O_h

Wie man sieht, stimmt die Symmetrie der elastischen Eigenschaften aller Kristallklassen eines Kristallsystems überein mit der kristallographischen Symmetrie der höchstsymmetrischen Klasse des Systems. Eine Ausnahme bildet nur das hexagonale System. Bei diesem ist die elastische Symmetrie (aller Klassen) noch höher als D_{6h}, indem jede Ebene durch die Hauptachse elastische Symmetrie-

ebene ist, so daß der Kristall hinsichtlich seiner elastischen Eigenschaften Rotationssymmetrie $D_\infty h$ um die Hauptachse besitzt.

Es sei bemerkt, daß Voigt beim trigonalen und tetragonalen System je 2 Abteilungen unterscheidet: Bei den Kristallen der 1. Abteilung ist die Lage der elastischen Symmetrieelemente durch die kristallographische Symmetrie (Kristallklasse) vollständig bestimmt, während bei den Kristallen der 2. Abteilung durch die Kristallklasse nur die Hauptachse der Punktgruppe der elastischen Eigenschaften festgelegt ist. Daher ergibt sich bei der 2. Abteilung zunächst eine elastische Konstante mehr als bei der 1. Abteilung. Dieselbe läßt sich aber durch Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems um die Hauptachse immer fortschaffen.

Aus der Tabelle der elastischen Symmetrie ergibt sich ohne weiteres, welche von den beim isotropen Körper möglichen Berandungen bei den einzelnen Kristallsystemen noch übrigbleiben. Beschränkt man sich auf allseitig endliche K, so sind nur noch solche Berandungen »zulässig«, deren zugeordnete Punktgruppen P in nachfolgender Tabelle aufgezählt sind:

Kristallsystem	P
rhombisch	D_{2h} ($\equiv V_h$)
tetragonal	D_{2h}, D_{4h}
hexagonal	D_{2h}, D_{3h}, D_{4h}, D_{6h}
regulär	D_{2h}, D_{4h}, T_d, O_h
isotrop	D_{2h}, D_{3h}, D_{4h}, D_{6h}, T_d, O_h

Für die Kristalle des triklinen, monoklinen und trigonalen Systems gibt es keine zulässigen geschlossenen Berandungen.

Die möglichen Kombinationen gemischter Randbedingungen.

Die Verteilung der gemischten Randbedingungen I und II auf die einzelnen Ebenen einer gegebenen Berandung K kann nicht völlig willkürlich vorgenommen werden. Sind nämlich 2 Ebenen von K gleichwertig in bezug auf das zugeordnete Raumsystem R, so können sie nach S. 108 in R nur denselben Charakter, also entweder E^s oder E^u besitzen, während ungleichwertige Ebenen sowohl denselben als auch verschiedenen Charakter besitzen können.

Die geforderten Randbedingungen dürfen hiermit nicht im Widerspruch stehen.

4. Die Eigenschwingungsysteme vom Typus (A).

Die zulässigen Ausbreitungsvektoren.

Hat man einen Bereich K, für den Eigenschwingungen vom Typus (A) möglich sind (also eine zulässige Berandung, auf der eine mögliche Verteilung gemischter Randbedingungen I und II vorgegeben ist), so kann der Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}$ der ebenen Welle, von der man beim Aufbau einer Eigenschwingung ausgeht, nur dann völlig willkürlich gewählt

werden, wenn K aus Ebenen E^s, E^u besteht, die alle durch einen Punkt hindurchgehen (Fall a S. 104); für alle übrigen Berandungen K aber (Fälle b, c, d) ergeben sich Einschränkungen in der Wahl von $\mathfrak{k}$, weil das einem solchen K zugeordnete R Parallelscharen S_i von Ebenen enthält. Es kann hier aus einer ebenen Welle nur noch dann eine Eigenschwingung aufgebaut werden, wenn ihr Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}$ für jede Parallelschar $\bar{S}_i$ $(i = 1, \cdots, N)$ der schon in Abschnitt 2 abgeleiteten Bedingung (19) bzw. (20) genügt.

Legen wir den Nullpunkt in einen gemeinsamen Punkt aller Scharen $\bar{S}_i$, so daß letztere geschrieben werden können:

$$S_i \equiv (\mathfrak{n}_i \mathfrak{x}) = h_i d_i \quad (h_i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1}$$

so entsprechen im $\mathfrak{k}$-Raum nach (19), (20) denjenigen Scharen $\bar{S}_i$, die nur aus Ebenen E^s oder E^u bestehen, die Parallelscharen:

$$T_i \equiv (\mathfrak{n}_i \mathfrak{k}) = 2 h_i \pi / 2 d_i, \tag{2}$$

und denjenigen S_i, die abwechselnd aus Ebenen E^s und E^u bestehen, die Parallelscharen:

$$T_i \equiv (\mathfrak{n}_i \mathfrak{k}) = (2 h_i + 1) \pi / 2 d_i, \tag{3}$$

und ein Vektor $\mathfrak{k}$ ist nur dann für den Aufbau einer Eigenschwingung verwendbar, wenn er zugleich allen N Ebenenscharen T_i angehört. Da letztere durch $\bar{R}$ eindeutig bestimmt sind, gibt es zu jedem $\bar{R}$ ein ganz bestimmtes System T von »zulässigen« Ausbreitungsvektoren, und daher gehört zu allen Bereichen $\bar{K}$, die dasselbe Raumsystem $\bar{R}$ erzeugen, dasselbe $\mathfrak{k}$-System T. Wie aus seiner Erzeugung unmittelbar hervorgeht, besitzt T im $\mathfrak{k}$-Raum mindestens die Symmetrie der zu R isomorphen Punktgruppe P, d. h. mit jedem $\mathfrak{k}$ ist zugleich die ganze Gruppe der in bezug auf P gleichwertigen $\mathfrak{k}$ in T enthalten. Im allgemeinen ist die Symmetrie von T sogar höher, z. B. ist mit $\mathfrak{k}$ immer auch $-\mathfrak{k}$ zulässig.

Entsprechend den 4 Arten a, b, c, d von Raumsystemen R (unterschieden nach dem Einbau ihrer Ebenenparallelscharen) können wir auch 4 in ihrer Struktur verschiedene Systeme T unterscheiden:

a) R enthält **keine** Translationengruppe.

Das ganze 3-dimensionale Kontinuum der Vektoren des $\mathfrak{k}$-Raumes ist zulässig, also

$$\mathfrak{k} = k_1 \mathfrak{d}_1 + k_2 \mathfrak{d}_2 + k_3 \mathfrak{d}_3; \quad -\infty < k_1, k_2, k_3 < +\infty \tag{4}$$

b) R enthält eine **lineare** Translationengruppe.

Die Endpunkte der zulässigen $\mathfrak{k}$ bilden eine Parallelschar von Ebenen im $\mathfrak{k}$-Raum. Eine dazu senkrechte Gerade durchstößt dieselbe in den Punkten eines linearen

Punktgitters. Dessen primitiver Vektor sei $\mathfrak{k}^3$. Legt man in seine Richtung die $\mathfrak{z}_3$-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems, so sind die zulässigen $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{k} = k_1\mathfrak{z}_1 + k_2\mathfrak{z}_2 + h_3\mathfrak{k}^3;\ -\infty < k_1, k_2 < +\infty,\ h_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (5)$$

c) enthält eine **ebene** Translationengruppe.

Die Endpunkte der zulässigen $\mathfrak{k}$ bilden eine Schar paralleler Geraden im $\mathfrak{k}$-Raum, deren Richtung übereinstimmt mit der Richtung der in P_{Ber} vorhandenen Symmetrieachse. Legt man die $\mathfrak{z}_3$-Achse in diese Richtung, so durchstoßen die Geraden die $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2$-Ebene in den Punkten eines ebenen Punktgitters. Dessen primitive Vektoren seien $\mathfrak{k}^1$ und $\mathfrak{k}^2$, also:

$$\mathfrak{k} = h_1\mathfrak{k}^1 + h_2\mathfrak{k}^2 + k_3\mathfrak{z}_3;\ h_1, h_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, -\infty < k_3 < +\infty \qquad (6)$$

d) R enthält eine **räumliche** Translationengruppe.

Die Endpunkte der zulässigen $\mathfrak{k}$ bilden als Schnittpunkte der Scharen T_i im $\mathfrak{k}$-Raum ein räumliches Punktgitter, dessen primitive Vektoren seien $\mathfrak{k}^1$, $\mathfrak{k}^2$, $\mathfrak{k}^3$, also:

$$\mathfrak{k} = h_1\mathfrak{k}^1 + h_2\mathfrak{k}^2 + h_3\mathfrak{k}^3;\ h_1, h_2, h_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \qquad (7)$$

Vereinfachte Erzeugung der Eigenschwingungen. Laufende und stehende Eigenschwingungen.

Die in Abschnitt 3 gegebene »Aufbauvorschrift« für die Eigenschwingungen kann man durch Beachtung der Gleichungen (2), (3) noch vereinfachen. Wählt man nämlich den Nullpunkt wie in (1), so läßt sich aus einer ebenen Welle $\mathfrak{w} = \mathfrak{A}\cos(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t - \varphi)$ mit zulässigem $\mathfrak{k}$ eine Eigenschwingung schon dadurch erzeugen, daß man mit $\mathfrak{w}$ nur an den durch den Nullpunkt gehenden Ebenen von $\bar{R}$ die vorgeschriebenen Spiegelungen bzw. Umkehrspiegelungen vornimmt. Die entsprechenden Operationen an den übrigen Ebenen von $\bar{R}$, (die ausnahmslos parallel zu Ebenen durch den Nullpunkt sind), erzeugen dann nämlich — darin besteht gerade die Bedeutung der Zulässigkeitsbedingungen für $\mathfrak{k}$ — keine weiteren (nicht schon vorhandenen) ebenen Wellen.

Die Eigenschwingungen werden somit schon aus $\mathfrak{w}$ erzeugt durch die Operationen der Punktgruppe P, die aus den durch den Nullpunkt gehenden Ebenen E^s, E^u von R gebildet wird[1]), also

1) Die Punktgruppe P kann noch, wie das Beispiel der Figuren 7 bis 9 zeigt, je nach der Wahl des Nullpunktes verschieden ausfallen. Trotzdem erhält man

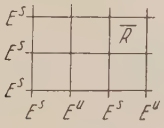

Fig. 7.

also

Fig. 8.

oder

Fig. 9.

natürlich immer physikalisch dieselbe Eigenschwingung. Wichtig ist nur, daß der Nullpunkt so gewählt wird, daß von jeder Parallelschar S_i aus R eine Ebene hindurchgeht.

$$\mathfrak{s}^e = \sum_P \mathfrak{A}_\mathfrak{k} \cos(\mathfrak{k}\mathfrak{r} - \omega t - \varphi), \tag{8}$$

oder, da ω und φ in allen Wellen dieselben sind:

$$\mathfrak{s}^e = \Big(\sum_P \mathfrak{A}_\mathfrak{k} \cos \mathfrak{k}\mathfrak{r}\Big) \cos(\omega t + \varphi) + \Big(\sum_P \mathfrak{A}_\mathfrak{k} \sin \mathfrak{k}\mathfrak{r}\Big) \sin(\omega t + \varphi). \tag{9}$$

Summiert wird über die Gruppe der in bezug auf P gleichwertigen $\mathfrak{k}$, was durch ein unter das Summenzeichen gesetztes P angedeutet ist.

Wenn in P **kein** Symmetriezentrum enthalten ist ($P = D_{3h}, T_d$), stellt (9) eine elliptische Schwingung dar, und die Eigenschwingung ist, weil die gegenlaufenden Wellen in ihr wegen des Fehlens des Symmetriezentrums nicht enthalten sind, eine laufende Eigenschwingung. Da mit $\mathfrak{k}$ aber auch $-\mathfrak{k}$ stets zulässig ist, gibt es immer auch die gegenlaufende Eigenschwingung.

Wenn in P ein Symmetriezentrum i enthalten ist ($P = D_{2h}, D_{4h}, D_{6h}, O_h$), stellt (9) eine geradlinige Schwingung dar, und $\mathfrak{s}^e$ ist eine stehende Eigenschwingung.

Je nachdem nämlich das Zentrum für P den Charakter i^s oder i^u besitzt, gilt $\mathfrak{A}_{-\mathfrak{k}} = -\mathfrak{A}_\mathfrak{k}$ oder $= +\mathfrak{A}_\mathfrak{k}$, weshalb (9) die Gestalt bekommt:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{s}^e = \Big(\sum_P \mathfrak{A}_\mathfrak{k} \sin \mathfrak{k}\mathfrak{r}\Big) \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{für } i^s \\ \text{oder} \\ &\mathfrak{s}^e = \Big(\sum_P \mathfrak{A}_\mathfrak{k} \cos \mathfrak{k}\mathfrak{r}\Big) \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{für } i^u. \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Entartungen.

Entartung, d. h. das Auftreten verschiedener Eigenschwingungen derselben Frequenz kann auf mehrere Weisen zustande kommen.

Entartung für singuläre Stellen der Ausbreitungsfläche oder infolge elastischer Symmetrie.

Da zu jedem $\mathfrak{k}$ immer 3 ebene Wellen verschiedener Polarisation $\mathfrak{a}_\nu$ möglich sind[1]), gibt es zu jedem $\mathfrak{k}$ auch 3 verschiedene Eigenschwingungen. Wenn nun $\mathfrak{k}$ auf einem Doppel- oder Dreifachpunkt der Ausbreitungsfläche endigt, bekommen 2 oder 3 von ihnen dieselbe Frequenz. Eine solche Entartung erhält man z. B. beim isotropen Körper für jede Richtung von $\mathfrak{k}$. Hier fallen nämlich 2 Schalen der Ausbreitungsfläche völlig zusammen, indem diese aus 2 konzentrischen Kugeln besteht, von

1) Auch für mehrfache Wurzeln der Frequenzgleichung können wir nach Abschnitt 1 voraussetzen, daß die 3 $\mathfrak{a}_\nu$ senkrecht aufeinander stehen.

denen die eine eine Doppelkugel ist. — Neben dieser einzig von den Elastizitätskonstanten abhängenden Entartung gibt es noch eine andere, die wesentlich von der Gestalt der Berandung mitbestimmt wird:

Entartung durch Symmetrie der Berandung. Diese tritt immer dann ein, wenn die Symmetrie der der Berandung zugeordneten Punktgruppe P_{Ber} geringer ist, als die Symmetrie P_{Kr} des Kristalls und dabei das System T der zulässigen $\mathfrak{k}$ noch Symmetrieoperationen besitzt[1]), die in P_{Kr}, aber nicht mehr in P_{Ber} enthalten sind (was von der Berandung bzw. von $\bar{R}$ eine gewisse Mindestsymmetrie und entsprechende Verteilung der gemischten Randbedingungen I. und II. Art erfordert). Durch eine solche Symmetrieoperation erhält man nämlich aus jedem zulässigen $\mathfrak{k}$ ein zulässiges $\mathfrak{k}'$, das auf derselben Ausbreitungsfläche wie $\mathfrak{k}$ endigt, aber nicht zur selben Eigenschwingung wie $\mathfrak{k}$ gehört, d. h. aber zu $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ gehören (dreimal) 2 verschiedene Eigenschwingungen derselben Frequenz. Sie gehen durch die genannte Symmetrieoperation auseinander hervor. — Solche Entartung findet z. B. statt für die Eigenschwingungen eines Würfels ($P_{\text{Ber}} = D_{2h}$) aus tetragonalem Material ($P_{\text{Kr}} = D_{4h}$), auf dessen Flächen nur Randbedingungen einer Art vorgegeben sind (Punktsymmetrie von $T = O_h$).

Die Vollständigkeit der Eigenschwingungssysteme vom Typus (A). Alle Bereiche $\bar{K}$, die als Erzeugende desselben Raumsystems $\bar{R}$ angesehen werden können, besitzen dasselbe System Σ aller möglichen Eigenschwingungen vom Typus (A). (Durch $\bar{R}$ ist nämlich das System der zulässigen Ausbreitungsvektoren und der Aufbau der zugehörigen Eigenschwingungen vollständig festgelegt.) Ein vollständiges Eigenschwingungssystem, welches gestattet, einen beliebig gegebenen Anfangszustand (der allerdings den Randbedingungen genügen muß) physikalisch fortzusetzen, kann Σ aber höchstens für K_0 sein, denn alle Schwingungszustände, die sich durch Überlagerung der Eigenschwingungen herstellen lassen, besitzen ja mindestens die Symmetrie $\bar{R}$, also auch Symmetrieebenen im Innern jedes der Bereiche K, außer K_0. Für die Grundbereiche K_0 läßt sich nun in der Tat die Vollständigkeit der beschriebenen Eigenschwingungssysteme beweisen, doch sei darauf verzichtet den Beweis hier wiederzugeben.

Es ist mir ein Bedürfnis, den Herren Professoren Dr. E. Fues und Dr. C. Schaefer nicht nur für die Anregung zu dieser Arbeit,

1) P_{Ber} = Symmetrie der Punktgruppe, die von den $\mathfrak{k}$ einer Eigenschwingung gebildet wird. Sie ist im allgemeinen kleiner als die Punktsymmetrie des Systems T.

sondern auch für stete, wohlwollende Förderung und persönliche Anteilnahme herzlich zu danken!

Ebenso sei den Herren Dr. F. Bopp, Dr. E. Lonn und Dr. H. Ludloff für wiederholte Diskussionen herzlich gedankt.

Literaturverzeichnis.

1. R. Ortvay, Über die Abzählung der Eigenschwingungen fester Körper. Ann. d. Phys. (4) **42** (1913) 745.
2. C. Schaefer-L. Bergmann, Über neue Beugungserscheinungen an schwingenden Kristallen. Naturwiss. **22** (1934) 685.
3. C. Schaefer-L. Bergmann, E. Fues-H. Ludloff, Weitere Untersuchungen über die Beugungserscheinungen an schwingenden Kristallen. Ber. Preuß. Akad. Wiss. (Phys.-math. Kl.) 1935.
4. H. Mueller, The intensity and polarization of the light diffracted by supersonic waves in solids. Phys. Rev. **52** (1937) 223.

Breslau, Institut für theoretische Physik.

Eingegangen am 7. Januar 1939.

Lebenslauf.

Am 30. November 1907 wurde ich als Sohn des Fleischermeisters Hugo Wierzejewski und seiner Ehefrau Maria, geb. Prause, in Glogau (Schlesien) geboren. Nach Besuch des humanistischen Gymnasiums meiner Heimatstadt, das ich Ostern 1927 mit dem Zeugnis der Reife verließ, studierte ich Physik. Zunächst zwei Semester in Freiburg und vier Semester in Göttingen. Sodann — mit Unterbrechungen — noch drei Semester in Breslau, wo ich auch am Physikalischen Institut der Universität unter Herrn Prof. C. Schaefer ein Semester experimentell arbeitete. Danach fertigte ich unter der Leitung von Herrn Prof. E. Fues vorliegende Dissertation an.

Allen meinen akademischen Lehrern und nicht zuletzt auch meinem Mathematik- und Physiklehrer am Gymnasium, Herrn Studienrat F. Schütz, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

Hugo Wierzejewski.